



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CARAȘ-SEVERIN

Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reșița, Caraș-Severin, ROMÂNIA

Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042

E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: <http://www.cs.isj.edu.ro>

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ

13.02.2010



CLASA A XII-A

PROFIL TEHNIC ȘI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECȚIA MEDIULUI

- 1. i)** Să se determine $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ pentru care legea de compoziție definită pe \mathbb{R} prin

$x * y = xy + 4ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ este asociativă și comutativă.

- ii)** Să se precizeze, justificând răspunsurile, care dintre următoarele mulțimi nu sunt părți

stabile ale lui \mathbb{R} în raport cu înmulțirea numerelor reale: $A = \{5n / n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- 2. i)** Se consideră mulțimea $M = \{f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \mid f(x) = x^2 + ax + b\}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$,

pentru care $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$.

- ii)** Pe $M = (0,1)$ se definește legea $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$, $\forall x, y \in M$. Determinați elementul neutru

al legii definite și simetricul elementului $x = \frac{1}{4} \in M$ față de legea " \circ ".

- 3. i)** Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^{bx} + 2x, & x < 2a - 1 \\ 9x - 4^{bx}, & x \geq a^2 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$

dintră astfel încât f să admită primitive pe \mathbb{R} .

- ii)** Să se arate că $\int_0^\pi \sin^{2n+3} x \cdot \cos^{2n+1} x dx = 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$

- 4.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$.

a) Să se determine $\int \frac{f(x)}{x} dx$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se determine $\int \frac{f(x)}{x^2} dx$, $x \in (0, \infty)$.

c) Să se demonstreze că, pentru orice primitivă F a funcției f , este adevărată inegalitatea:

$$F(2007) + F(2008) < F(2009) + F(2010).$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.