



CLASA A XII-A
PROFIL TEHNIC ȘI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECȚIA MEDIULUI

1. i) Să se determine $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ pentru care legea de compoziție definită pe \mathbb{R} prin $x * y = xy + 4ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ este asociativă și comutativă.
- ii) Să se precizeze, justificând răspunsurile, care dintre următoarele mulțimi nu sunt părți stabile ale lui \mathbb{R} în raport cu înmulțirea numerelor reale: $A = \{5n/n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. i) Se consideră mulțimea $M = \{f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \mid f(x) = x^2 + ax + b\}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$, pentru care $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$.
- ii) Pe $M = (0, 1)$ se definește legea $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$, $\forall x, y \in M$. Determinați elementul neutru al legii definite și simetricul elementului $x = \frac{1}{4} \in M$ față de legea " \circ ".
3. i) Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^{bx} + 2x, & x < 2a - 1 \\ 9x - 4^{bx}, & x \geq a^2 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să admită primitive pe \mathbb{R} .
- ii) Să se arate că $\int_0^{\pi} \sin^{2n+3} x \cdot \cos^{2n+1} x dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
4. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$.
- a) Să se determine $\int \frac{f(x)}{x} dx$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Să se determine $\int \frac{f(x)}{x^2} dx$, $x \in (0, \infty)$.
- c) Să se demonstreze că, pentru orice primitivă F a funcției f , este adevărată inegalitatea:
 $F(2007) + F(2008) < F(2009) + F(2010)$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.